

## Richtungsfehler bei DMS-Installationen

### Dehnungsmessstreifen in gleichförmigen biaxialen Dehnungsfeldern

Klebt man einen Dehnungsmessstreifen (DMS) auf eine Probenoberfläche und weicht dabei die Gitterlängsachse mit einem geringen Winkel von der angenommenen Hauptdehnungsrichtung ab, so ergibt sich bei der Messung ein Fehler, der mit der Größe des Abweichungswinkels zusammenhängt. Bei einem einzelnen DMS, der unter dem Einfluss eines gleichförmigen biaxialen Dehnungsfeldes steht, ist der Fehler im Allgemeinen eine Funktion der drei folgenden Faktoren, wobei die Querdehnungsempfindlichkeit unberücksichtigt bleibt:

1. Verhältnis des algebraischen Maximums zum algebraischen Minimum der Hauptdehnung,  $\varepsilon_p/\varepsilon_q$ .
2. Winkel  $\phi$  zwischen der tatsächlichen Hauptdehnungsachse und der angenommenen Dehnungsachse.
3. Abweichungswinkel zwischen der angenommenen Hauptdehnungsachse und der Längsachse des DMS-Gitters ( $\beta$ ).

Diese Faktoren sind in den Abb. 1 und 2 für den besonderen Fall eines 1-achsigen Spannungsfeldes dargestellt, der im Allgemeinen recht einfach ist. Abb. 1 zeigt die Dehnungsverteilung an einer Messstelle, dargestellt in Polar-Koordinaten, während in Abb. 2 die Mohr'schen Spannungs- und Dehnungskreise für den gleichen Fall gezeichnet sind. Die Längen der Radiallinien in Abb. 1, vom Mittelpunkt bis zu den Begrenzungslinien des Diagramms, sind den entlang dieser Linien existierenden Dehnungen proportional.

Die schmalen Zungen, entlang der y-Achse, stellen die negative Poisson'sche Querdehnung für diesen Fall dar. Dieses Diagramm erlaubt die qualitative Aussage, dass eine kleine Winkelabweichung nur einen sehr kleinen Fehler bei der Dehnungsmessung hervorruft, wenn  $\phi = 0^\circ$  oder  $\phi = 90^\circ$  ist, da das Diagramm an diesen Punkten sehr flach ist und einen Wendepunkt durchläuft. Andererseits kann der von einer Winkelabweichung herrührende Messfehler für  $\phi$ -Werte zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  sehr groß werden, da die Neigung des Diagramms an diesen Stellen sehr steil ist, wie aus Abb. 1 hervorgeht.

Eine genauere Betrachtung dieses Phänomens erlaubt Abb. 2, die klar aussagt, dass für  $\phi = 45^\circ$  oder  $2\phi = 90^\circ$  die gleiche kleine Winkelabweichung den größten Messfehler ergeben wird, da an diesen Punkten die Dehnungsänderung in Abhängigkeit von der Winkeländerung ein Maximum erreicht. Das gleiche Resultat erhält man rechnerisch, indem man die 2. Ableitung der Gleichung für das Polar-Dehnungsdiagramm gleich Null setzt und für den Winkel maximaler Neigung löst.

Es kann also generell gesagt werden, dass in jedem gleichförmigen biaxialen Dehnungsfeld der Messfehler dann ein Maximum erreicht, wenn die Dehnung unter  $45^\circ$  zu einer Hauptdehnungsachse gemessen wird und dass dieser Fehler dann am kleinsten ist, wenn in Richtung einer dieser Hauptachsen gemessen wird.\*)

\*)Die Ausnahme bezüglich dieser Aussage liegt vor, wenn  $\varepsilon_p = \varepsilon_q$ , wie z. B. beim singularen Fall einer Kugel unter Innendruck. In diesem Fall sind die Oberflächendehnungen überall gleich und richtungsunabhängig.

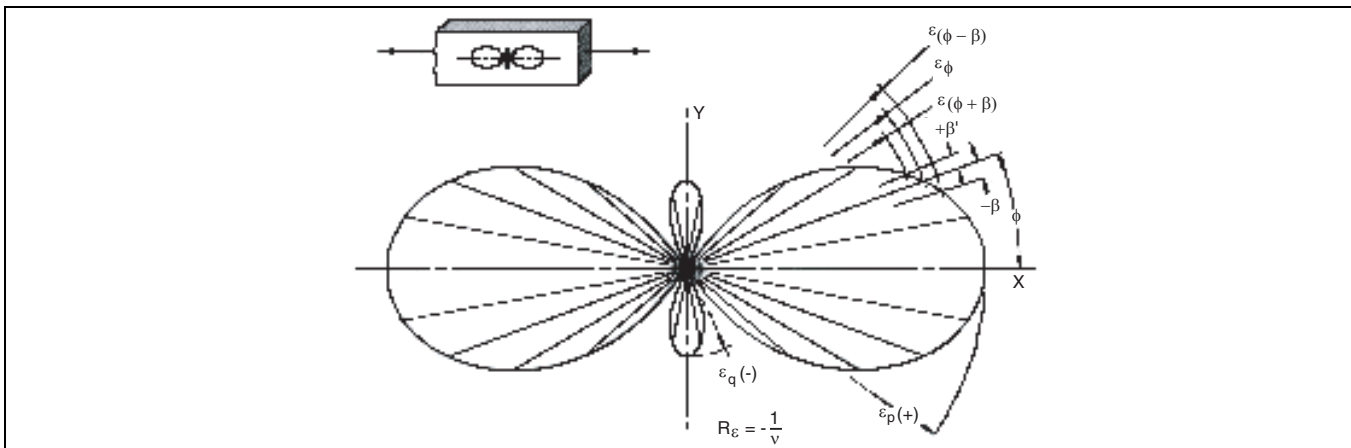


Abb. 1 - Polare Dehnungsverteilung bei einachsiger Spannung. Darstellung des Fehlers der angezeigten Dehnung, wenn die Längsachse des DMS um den Winkel  $\pm\beta$  vom beabsichtigten Winkel  $\phi$  abweicht.

## Richtungsfehler bei DMS-Installationen

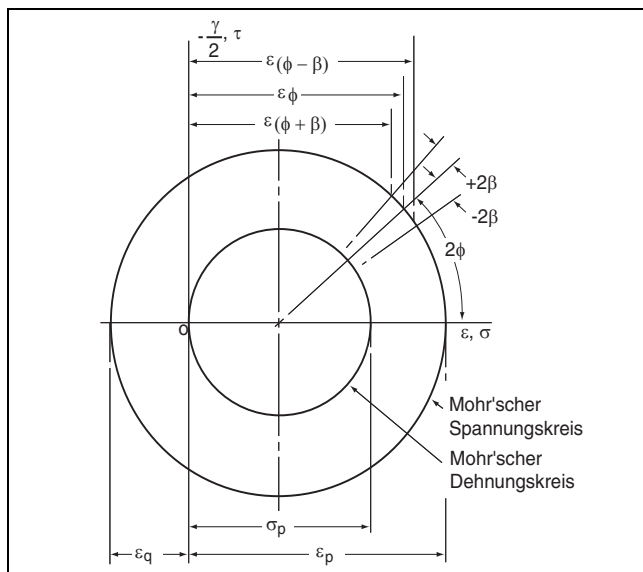


Abb. 2 - Die Mohr'schen Spannungs- und Dehnungskreise für den einachsigen Spannungszustand sind eine andere Möglichkeit, die hier besprochenen Fehler darzustellen.

Der Messfehler, der durch die Abweichung der DMS-Achse von der Hauptdehnungsachse entsteht, kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$n = \varepsilon_{(\phi \pm \beta)} - \varepsilon_{\phi} \quad (1)$$

Dabei ist:

$n$  = Messfehler, ausgedrückt in  $\mu\text{m/m}$

$\varepsilon_{\phi}$  = die Dehnung entlang der Messachse, wobei diese um den Winkel  $\phi$  von der Hauptdehnungsachse abweicht, ausgedrückt in  $\mu\text{m/m}$

$\varepsilon_{(\phi \pm \beta)}$  = die Dehnung entlang der DMS-Achse unter Berücksichtigung der Winkelabweichung  $\pm\beta$  von der Achse, entlang der gemessen werden soll, ausgedrückt in  $\mu\text{m/m}$

Für Gleichung (1) kann man auch schreiben

$$n = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_q}{2} [\cos 2(\phi \pm \beta) - \cos 2\phi] \quad (2)$$

Dabei stellen  $\varepsilon_p$  und  $\varepsilon_q$  die maximale, respektive minimale Hauptdehnung dar.

Will man den Fehler als Prozentsatz des Dehnungswertes  $\varepsilon_{\phi}$  ausdrücken, schreibt man

$$n' = \frac{\varepsilon_{(\phi \pm \beta)} - \varepsilon_{\phi}}{\varepsilon_{\phi}} \times 100 \quad (3)$$

$$n' = \frac{\cos 2(\phi \pm \beta) - \cos 2\phi}{\frac{R_{\varepsilon} + 1}{R_{\varepsilon} - 1} + \cos 2\phi} \times 100 \quad (4)$$

Dabei ist

$$R_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q}$$

Aus Gleichung (4) geht hervor, dass  $n'$  bei kleinen Werten von  $\varepsilon_{\phi}$  groß und bei  $\varepsilon_{\phi} = 0$  unendlich wird. Um die Größenordnung des Fehlers, der durch die Abweichung der DMS-Gitterachse um gewisse Winkelbeträge von den Dehnungsachsen hervorgerufen wird, zu bestimmen, sei im Folgenden ein mehr oder weniger typisches Beispiel unter Benutzung der Gleichung (2) durchgerechnet:

Für ein einachsigen Spannungsfeld gilt  $\varepsilon_q = -\nu\varepsilon_p$ .

$\nu = 0,285$  für Stahl.

Es sei  $\varepsilon_p = 1000\mu\text{m/m}$

Dann ist  $\varepsilon_q = -0,285 \cdot 1000 = -285\mu\text{m/m}$

Daraus ergibt sich:

$$n = 642,5 [\cos 2(\phi \pm \beta) - \cos 2\phi] \quad (5)$$

Diese Gleichung (5) ist in Abb. 3 als Diagramm grafisch dargestellt für einen Bereich von  $\phi = 0^\circ$  bis  $90^\circ$ , und einem DMS-Applikationsfehlerbereich von  $0^\circ - 10^\circ$ . Um diesen Applikationsfehler mithilfe des  $n$ -Wertes aus dem Diagramm Abb. 3 zu korrigieren, löse man die Gleichung für den betreffenden  $\varepsilon_{\phi}$ -Wert und setze den Wert  $n$  aus Diagramm Abb. 3 ein, wenn die Winkelabweichung bekannt ist. Das Diagramm in Abb. 3 gilt hier jedoch nur als Beispiel für den Fall  $\varepsilon_q = -0,285 \varepsilon_p$  (einachsigen Spannungsfeld in Stahl).

Um für alle biaxialen Dehnungsfälle ähnliche Kurven errechnen zu können, benutze man die Gleichung (2).

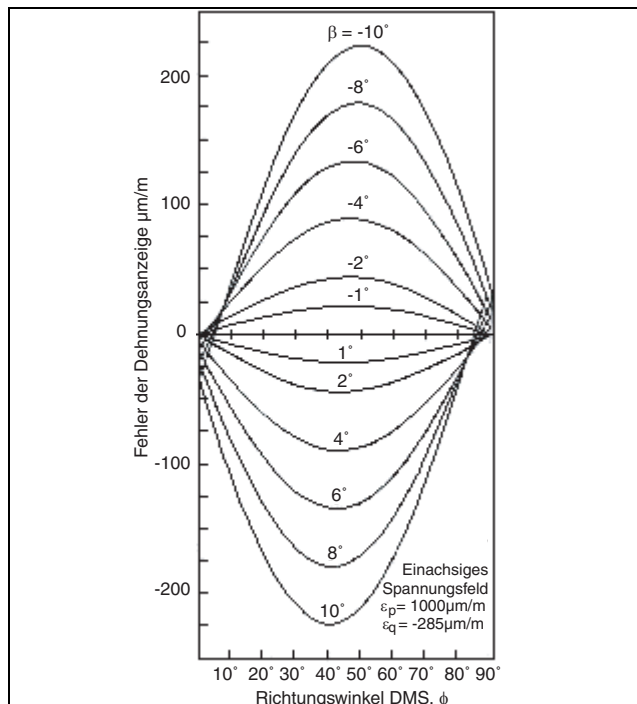


Abb. 3 - Fehler der Dehnungsanzeige in Abhängigkeit von der falschen Ausrichtung des DMS für den besonderen Fall des einachsigen Spannungsfeldes in Stahl.

$$\varepsilon_p = 1000\mu\text{m/m}, \varepsilon_q = -285\mu\text{m/m}$$

## Richtungsfehler bei DMS-Installationen

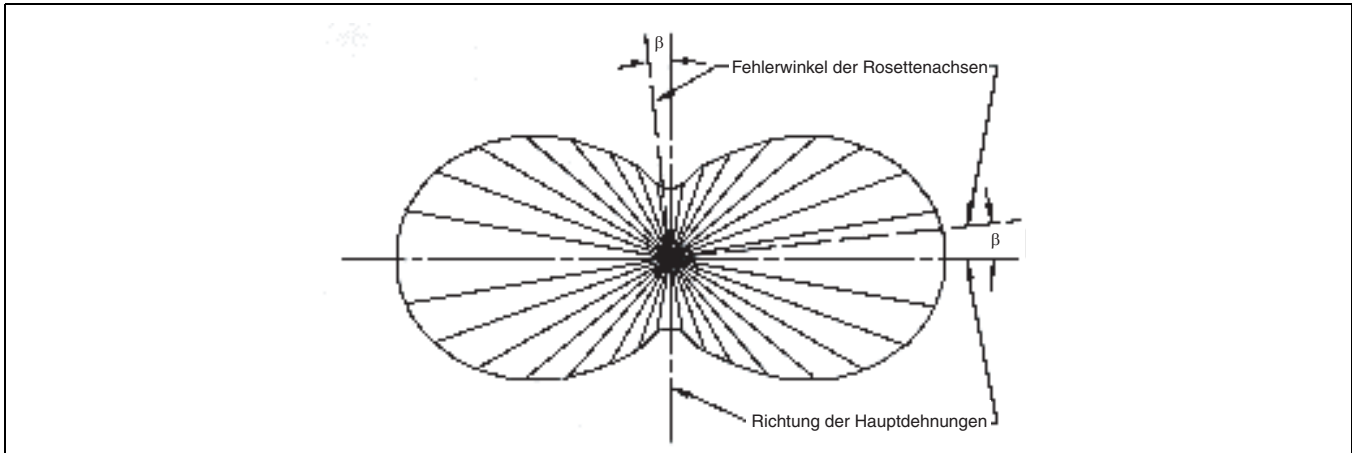


Abb. 4 - Biaxiales Dehnungsfeld, wobei die Rosettenachsen um den Winkel  $\beta$  von den Hauptachsen abweichen

### 90° - Rosetten mit zwei getrennten Gittern

Wenn auch die obigen Ausführungen für das Verständnis der Natur der beschriebenen Fehler von Nutzen sind, scheint doch eine Untersuchung hinsichtlich dieser Fehler bei der Installation von 2-Gitter-90°-Rosetten von wesentlich größerem praktischen Interesse zu sein.

Eine solche Rosette wird im Allgemeinen dann benutzt, wenn der Betrag der Hauptspannungen in einem Spannungsfeld festgestellt werden soll, unter der Voraussetzung, dass die Richtung der Hauptspannungen bekannt sind. In diesem Fall sollten die Rosetten so geklebt werden, dass die Richtung der Gitterachsen mit der Richtung der Hauptspannungsachsen übereinstimmen. Ob jetzt eine durch die Installation hervorgerufene Abweichung der Gitterachsen von den Hauptspannungsachsen entstanden ist oder ob sogar die Gitterachsen der Rosette von der Produktion her nicht genau im Winkel von 90° zueinanderstehen, auf jeden Fall werden sich dann bei der Berechnung der Hauptspannungen aus den gemessenen Dehnungen Fehler ergeben.

In Abb. 4 wird ein biaxiales Dehnungsfeld gezeigt, in das die beiden Gitterachsen einer 90°-Rosette eingezeichnet sind. Diese beiden Gitterachsen weichen um den Winkel  $\beta$  von den Hauptspannungsachsen ab. Die prozentualen Fehler der Hauptspannungen und der Schubspannungen, abhängig von der Winkelabweichung, berechnen sich folgendermaßen:

$$n_{\sigma_p} = \frac{\hat{\sigma}_p - \sigma_p}{\sigma_p} \times 100 \quad (6)$$

$$n_{\sigma_p} = \frac{(1 - R_\varepsilon)(1 - \nu)(1 - \cos 2\beta)}{2(R_\varepsilon + \nu)} \times 100 \quad (7)$$

$$n_{\sigma_q} = \frac{\hat{\sigma}_q - \sigma_q}{\sigma_q} \times 100 \quad (8)$$

$$n_{\sigma_q} = \frac{(R_\varepsilon - 1)(1 - \nu)(1 - \cos 2\beta)}{2(1 + \nu R_\varepsilon)} \times 100 \quad (9)$$

$$n_{\tau_{MAX}} = \frac{\hat{\tau}_{MAX} - \tau_{MAX}}{\tau_{MAX}} \times 100 \quad (10)$$

$$n_{\tau_{MAX}} = -(1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (11)$$

$\hat{\sigma}_p$ ,  $\hat{\sigma}_q$ ,  $\hat{\tau}_{max}$  sind die Hauptspannungen, bzw. max. Schubspannungen, abgeleitet aus den gemessenen Dehnungen, bei einer Winkelabweichung  $\beta$  der Rosette von den Hauptachsen.

$R_\varepsilon = \varepsilon_p / \varepsilon_q$  stellt das Verhältnis der maximalen zur minimalen Dehnung dar.

Wenn man das Verhältnis der Hauptdehnungen durch das Verhältnis der Hauptspannungen ersetzt, wobei

$$R_\sigma = \frac{R_\varepsilon + \nu}{1 + \nu R_\varepsilon} = \frac{\sigma_p}{\sigma_q} \quad (12)$$

oder

$$R_\varepsilon = \frac{R_\sigma - \nu}{1 - \nu R_\sigma} = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_q} \quad (13)$$

$$n_{\sigma_p} = \frac{1 - R_\sigma}{2R_\sigma} (1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (14)$$

$$n_{\sigma_q} = \frac{R_\sigma - 1}{2} (1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (15)$$

ist, kann man die Gleichungen (11), (14) und (15) zu Hilfe nehmen, um die Größenordnung der auftretenden Fehler demonstrieren zu können. Man denke sich einen dünnwandigen, zylindrischen Druckkessel. In diesem Fall haben die Umfangsspannungen die doppelte Größe der Axialspannungen und das gleiche Vorzeichen.

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_q} = R_\sigma = 2$$

### Richtungsfehler bei DMS-Installationen

Für die Gleichungen (11), (14) und (15) gilt dazu:

$$n_{\tau_{MAX}} = -(1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (11a)$$

$$n_{\sigma_p} = -1/4(1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (14a)$$

$$n_{\sigma_q} = 1/2(1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (15a)$$

Die Gleichungen (11 a), (14a) und (15a) sind in Abb. 5 dargestellt. Aus diesem Diagramm geht hervor, dass die Fehler, hervorgerufen durch die Winkelabweichung  $\beta$  der Rosettenachsen, relativ klein sind. Bei einer Abweichung von  $5^\circ$  sind z. B. die Fehler für  $\tau_{max}$ ,  $\sigma_p$  und  $\sigma_q$  -1,5%, -0,38%, bzw. 0,75%.

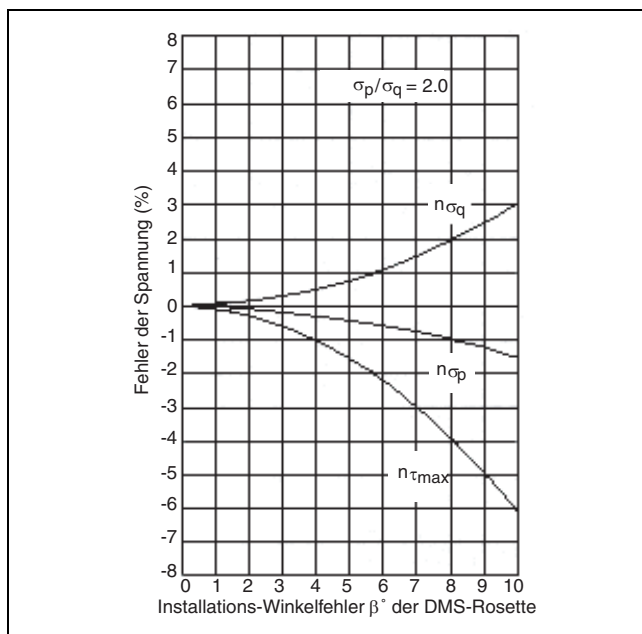


Abb. 5 - Prozentualer Fehler der Hauptspannung und der maximalen Scherspannung für ein biaxiales Spannungsfeld mit  $\sigma_p/\sigma_q = 2,0$ .

Um für eine bekannte Winkelabweichung eine Korrektur vornehmen zu können, entnehme man den Wert (n) aus dem Diagramm Abb. 5 oder aus ähnlichen Diagrammen, die mithilfe der Gleichungen (7), (9), (11), (4) und (15) erstellt worden sind und löse die Gleichungen (6), (8) und (10) für  $\sigma_p$ ,  $\sigma_q$  und  $\tau_{max}$ . Jetzt setze man den Wert (n) mit dem jeweiligen Vorzeichen ein. Das bedeutet

$$\sigma_p = \frac{\hat{\sigma}_p}{1 + \frac{n_{\sigma_p}}{100}} \quad (16)$$

$$\sigma_q = \frac{\hat{\sigma}_q}{1 + \frac{n_{\sigma_q}}{100}} \quad (17)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\hat{\tau}_{MAX}}{1 + \frac{n_{\tau_{MAX}}}{100}} \quad (18)$$

Dabei sind  $\hat{\sigma}_p$  und  $\hat{\sigma}_q$  die max. Hauptspannungen, errechnet aus den Dehnungsmessungen und  $\hat{\tau}_{max}$  ist die max. Schubspannung errechnet aus

$$\hat{\tau}_{MAX} = \frac{\hat{\sigma}_p - \hat{\sigma}_q}{2}$$

Während die Fehler im obigen Fall sehr klein waren, ergeben sie bei Extremwerten von  $R_\sigma$  andere Verhältnisse. Im Allgemeinen wird  $n_{\sigma_q}$  sehr große für  $|R_\sigma| \ll 1,0$ , genauso wie bei  $|R_\sigma| \gg 1,0$  für  $n_{\sigma_q}$ . Der Fehler für die Schubspannung ist unabhängig vom Spannungszustand.

Diese oben angestellten allgemeinen Betrachtungen können an dem beschriebenen Beispiel eines zylindrischen Druckkessels konkretisiert werden. Dieses Beispiel soll allerdings jetzt um eine zusätzliche Bedingung erweitert werden:

Zum im Zylinder herrschenden Innendruck kommt noch eine von außen aufgebrachte Druckkraft hinzu, die auf die Zylinderstirnflächen wirkt. Angenommen diese Kraft hätte die Größe  $0,8 \pi r^2 p$ , wobei r der Innenradius des Zylinders ist und p der Innendruck. Dann ergibt sich für das Hauptspannungsverhältnis:

$$R_\sigma = 10$$

Daraus folgt für die Gleichungen (14) und (15)

$$n_{\sigma_p} = -0,45(1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (14b)$$

$$n_{\sigma_q} = 4,5(1 - \cos 2\beta) \times 100 \quad (15b)$$

In diesem Falle ruft ein Rosetten-Installationsfehler von  $5^\circ$  für  $\sigma_p$  einen Fehler von -0,68% und für  $\sigma_q$  einen Fehler von 6,75% hervor.

In der vorliegenden Arbeit wurden Fehler definiert und berechnet, die von Abweichungen der DMS- oder Rosettenachsen um gewisse Winkelbeträge von den Hauptdehnungsachsen hervorgerufen werden.

Fehler, die aus einer Verschiebung der Rosettengitterachsen zueinander resultieren, sollten einer besonderen Untersuchung unterworfen werden.